

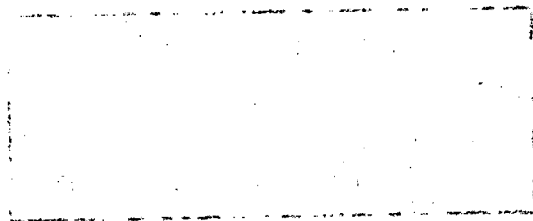
EFFIZIENTE BERECHNUNG SPEZIELLER FUNKTIONEN
MITTELS ASYMPTOTISCHER ENTWICKLUNGEN
UND ELIMINATIONSPROZEDUREN

Guido Walz

Nr. 62

November 1985

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines von der Deutschen Forschungs-
Gemeinschaft geförderten Projekts (Nr. Me 66/5-1) erstellt



Effiziente Berechnung spezieller Funktionen
mittels asymptotischer Entwicklungen
und Eliminationsprozeduren

In der vorliegenden Arbeit soll eine Methode zur Approximation von Funktionen vorgestellt werden, die sich grundsätzlich von den üblichen Approximationsverfahren (polynomiale & rationale Approximation, Spline-Methoden) unterscheidet; sie ist anwendbar auf eine große Zahl von Funktionen, z.B. auf die Logarithmusfunktion, auf arcus- und area-Funktionen sowie auf elliptische Integrale erster Art.

0. Einleitung

mit d

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Konstruktion spezieller asymptotischer Entwicklungen sowie deren Anwendung auf die Approximation von Funktionen auf einem reellen Intervall. Es handelt sich dabei nicht um die normalerweise vorliegenden Entwicklungen "für großes Argument" (d.h. für $|x| \rightarrow \infty$), sondern um eine spezielle Art der Konvergenz einer Funktionenfolge $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine vorgegebene Funktion $f(x)$, also asymptotische Betrachtungen für $n \rightarrow \infty$.

Das spezielle, noch zu definierende Konvergenzverhalten von $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ macht es möglich, aus dieser Folge durch lineare Eliminationsverfahren neue, schneller konvergente Folgen zu konstruieren.

Definitionen und Ausführungen des ersten Kapitels dieser Arbeit wurden weitgehend übernommen von G.Meinardus, der als erster asymptotische Systeme und Entwicklungen in dieser Form definierte ([9], [10, S.156ff]). Dabei handelt es sich im wesentlichen um eine verallgemeinerte und gleichzeitig vereinheitlichte Darstellung verschiedener älterer Verfahren, etwa der "Extrapolation vom RICHARDSON-Typ" oder des ROMBERG-Verfahrens; einen guten Überblick über diese "Extrapolationsverfahren" gibt D.C.Joyce [7].

Ein Problem bei der Anwendung der im ersten Kapitel eingeführten Methode auf die Approximation von Funktionen besteht darin, Funktionenfolgen $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden, die in geeigneter Weise gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren. Wir schlagen daher in Kapitel 2 ein Verfahren vor, mit dem solche Folgen konstruiert

werden können. Ansätze hierfür findet man schon bei H. Rutishauser [12] und A. Hurwitz [6], der in dieser 1911 veröffentlichten Arbeit bereits eine überraschend modern anmutende Darstellung gibt. Er geht allerdings nicht auf das spezielle Konvergenzverhalten der Folgen $\{\sigma_n(x)\}$ ein und zeigt auch nicht Anwendungsmöglichkeiten in der Fülle, wie wir das tun werden.

Unser Verfahren ist anwendbar zur Approximation von Funktionen, die auf dem betrachteten Intervall umkehrbar sind; wir behandeln als Beispiele den Logarithmus sowie arcus-Funktionen.

Besonders effizient ist es, wenn die Umkehrfunktion der zu approximierenden Funktion ein algebraisches Additionstheorem besitzt. Dies führt im dritten Kapitel zur Betrachtung der größten Klasse von Funktionen dieser Art, den elliptischen (speziell Jacobi's elliptische Funktionen), und den elliptischen Integralen erster Art als deren Umkehrfunktionen.

Um dem Leser die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen wieder ins Gedächtnis zu rufen, ist die Darstellung derselben etwas ausführlicher, als dies für die Anwendung unseres Verfahrens notwendig wäre.

Kapitel 3 beinhaltet ebenfalls einen (numerischen) Vergleich unseres Verfahrens mit dem z.Zt. sehr aktuellen AGM-Verfahren zur Approximation von elliptischen Integralen erster Art (vgl. [2], [3], [13]). Es zeigt sich, daß für Fehlergrößen bis etwa 10^{-20} , wie sie für numerische Approximationen normalerweise ausreichend sind, unser asymptotisches Verfahren (in Verbindung

Mit der Eliminationsprozedur) schneller zum Ziel führt als die AGM-Methode, deren quadratische Konvergenz erst bei größeren Genauigkeiten zum Tragen kommt.

Die Approximierbarkeit des elliptischen Integrals $F(x,k)$

Wir wollen nun zeigen,

nutzen wir anschließend aus, um seine Umkehrfunktion, den sinus

amplitudinis $\text{sn}(x,k)$ mittels der NEWTON-Iteration zur Berech-

nung der inversen Funktion zu approximieren. Die NEWTON-Iteration

ist hier effizient anwendbar, da die Ableitung des elliptischen Integrals,

$$\frac{d}{dx} F(x,k) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}^{-1}$$

elementar berechenbar ist. Auch hier geben wir ein numerisches Beispiel.

Die somit gezeigte Approximierbarkeit von $\text{sn}(x,k)$, einer der elliptischen Funktionen Jacobi's, benutzen wir schließlich dazu, um die (zumindest theoretische) Berechenbarkeit beliebiger elliptischer Funktionen mit der vorgestellten Methode zu zeigen.

1. Asymptotische Systeme und asymptotische Entwicklungen

Im folgenden werden wir die für diese Arbeit zentralen Begriffe "asymptotisches System" und "asymptotische Entwicklung" definieren und erläutern sowie damit zusammenhängende lineare Eliminationsprozeduren einführen. Man vergleiche hierzu G.Meinardus ([9] ,[10]).

Definition 1.1:

a) Ein System V von Vektoren

$$v^{(\mu)} = (v_1^{(\mu)}, v_2^{(\mu)}, \dots), \quad \mu \in \mathbb{N}$$

heißt asymptotisches System, wenn für alle $\mu \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen gelten:

1. $v_n^{(\mu)} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
2. $v_n^{(\mu)} = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$,
3. $v_n^{(\mu+1)} = o(|v_n^{(\mu)}|)$ für $n \rightarrow \infty$.

b) Es sei I ein reelles Intervall und $S = \{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge auf I definierter Funktionen. Die Folge S besitzt eine asymptotische Entwicklung der Ordnung $m+1$ nach dem as. System V , wenn es von n unabhängige (auf I definierte) Funktionen $f(x)$ und $c_\mu(x)$, $\mu=1(1)m+1$ gibt, so daß

$$\sigma_n(x) = f(x) + \sum_{\mu=0}^m c_{\mu+1}(x) \cdot v_n^{(\mu+1)} + o(|v_n^{(m+2)}|) \quad (1)$$

für alle $x \in I$.

Es gilt dann also für alle $x \in I$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x) .$$

Wir wollen nun die beiden am häufigsten vorkommenden asymptotischen Systeme darstellen und daran aufzeigen, wie das spezielle Konvergenzverhalten (1) der Folge S dazu benutzt werden kann, im jeweiligen Fall durch lineare Eliminationsverfahren neue Folgen zu konstruieren, die mit wachsendem n rascher gegen $f(x)$ konvergieren.

1.1. Geometrische asymptotische Systeme

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ komplexe Zahlen mit

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > 0 ;$$

Ein asymptotisches System heißt geometrisches as. System

$G = G(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, wenn für alle μ gilt:

$$v^{(\mu)} = \{\lambda_\mu, \lambda_\mu^2, \lambda_\mu^3, \dots\} .$$

Besitzt die Folge $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ also eine as. Entwicklung nach einem geometrischen as. System, so hat (1) die Form

$$\sigma_n(x) = f(x) + \sum_{\mu=0}^m c_{\mu+1}(x) \cdot \lambda_{\mu+1}^n + o(|\lambda_{m+2}^n|) \quad (2)$$

für $n \rightarrow \infty$

Durch Elimination des c_1 -Terms kann man eine rascher konvergente Folge konstruieren:

Lemma 1.2: Die Folge $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitze auf I die as. Entwicklung (2) mit $m \geq 2$. Dann besitzt die Folge $\{\sigma_n^{(1)}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$\sigma_n^{(1)}(x) := \sigma_n(x) + \frac{1}{1 - \lambda_1} (\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)) , \quad (3)$$

für alle $x \in I$ die as. Entwicklung

$$\sigma_n^{(1)}(x) = f(x) + \sum_{\mu=1}^m c_{\mu+1}^{(1)}(x) \cdot \lambda_{\mu+1}^n + O(|\lambda_{m+2}^n|) \quad (4)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Sie konvergiert also schneller gegen $f(x)$ als $\sigma_n(x)$ (falls $c_1(x) \neq 0$).

Beispiele hierzu findet man in ([9],[10]).

1.2. Logarithmische asymptotische Systeme

Es seien ρ_1, ρ_2, \dots komplexe Zahlen mit

$$0 < \operatorname{Re} \rho_1 < \operatorname{Re} \rho_2 < \dots$$

Ein asymptotisches System heißt logarithmisches as. System

$L = L(\rho_1, \rho_2, \dots)$, wenn für alle μ gilt:

$$v^{(\mu)} = \{1^{-\rho_\mu}, 2^{-\rho_\mu}, 3^{-\rho_\mu}, \dots\}$$

Besitzt die Folge $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ also eine Entwicklung nach einem logarithmischen as. System, so hat (1) die Form

$$\sigma_n(x) = f(x) + \sum_{\mu=0}^m c_{\mu+1}(x) \cdot n^{-\rho_{\mu+1}} + O(n^{-\text{Re } \rho_{m+2}}) \quad (5)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Auch die Konvergenz der durch (5) gegebenen Folge kann durch Elimination des $\max c_1$ -Terms beschleunigt werden, etwa durch die Vorschrift

$$\sigma_n^{(1)}(x) := \sigma_n(x) + \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\rho_1}} (\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)). \quad (6)$$

Da das Verfahren (6) aber für große n numerisch instabil ist, verwandelt man meist (5) in eine Entwicklung nach einem geometrischen as. System; hierzu wählt man zwei natürliche Zahlen n_0 und ℓ mit $\ell \geq 2$ und definiert die Folge $\{y_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ durch

$$y_i(x) := \sigma_{\ell^i \cdot n_0}(x) \quad \text{für } i \in \mathbb{N}, x \in I.$$

$\{y_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt eine as. Entwicklung nach dem geometrischen System $G(\ell^{-\rho_1}, \ell^{-\rho_2}, \dots)$.

Für den häufigsten Fall, nämlich $\ell := 2$ und $n_0 := 1$, mit dem wir uns im folgenden beschäftigen werden, wollen wir noch die asymptotische Entwicklung von $y_i(x)$ sowie die Elimination (3) explizit angeben; da man die Vorschrift natürlich wiederholt anwenden kann, formulieren wir das Verfahren (3) in iterativer Form.

Lemma 1.3: Die Folge $\{y_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ besitze eine as. Entwicklung nach dem geometrischen System $G(2^{-\rho_1}, 2^{-\rho_2}, \dots)$.

Dann besitzen die nach der Vorschrift

$$\left. \begin{aligned} y_i^{(0)}(x) &:= y_i(x) & i=0(1) \\ y_i^{(k)}(x) &:= \frac{2^{\rho_k} y_{i+1}^{(k-1)}(x) - y_i^{(k-1)}(x)}{2^{\rho_k} - 1} & \begin{array}{l} k=1(1)m \\ i=0(1) \end{array} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

gebildeten Folgen $\{y_i^{(k)}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Entwicklung nach dem geometrischen System $G(2^{-\rho_{k+1}}, 2^{-\rho_{k+2}}, \dots)$, es gilt

$$y_i^{(k)}(x) = f(x) + \sum_{\mu=k}^m c_{\mu+1}(x) \cdot 2^{-i \cdot \rho_{\mu+1}} + O(2^{-i \cdot \text{Re } \rho_{m+2}})$$

Das Lemma folgt direkt aus den vorhergehenden Erläuterungen;
(7) ist die auf diesen Fall übertragene iterative Formulierung von (3).

Bemerkung 1.4: In der numerischen Praxis gibt man einen maximalen Index k_{\max} vor, so daß die Indexvorschrift in (7) lautet: $k=1(1)k_{\max}$ und $i=0(1)k_{\max}-k$; die Ergebnisse werden in Schema-Form notiert:

Das

$$y_0^{(0)}(x)$$

nach

$$y_0^{(1)}(x)$$

Auf dem ist

$$y_1^{(0)}(x)$$

folgt

$$y_0^{(k_{\max})}(x)$$

da hier

$$y_{k_{\max}-1}^{(1)}(x)$$

die

$$y_{k_{\max}}^{(0)}(x)$$

nach

(8)

Der Wert $y_0^{(k_{\max})}(x)$ dient dann als Approximation an $f(x)$.

Wie bereits erwähnt, wurden asymptotische Systeme in der hier verwendeten Form erstmals von G.Meinardus eingeführt; als Spezialfälle enthalten sind zahlreiche numerische Verfahren, die meist als "Extrapolationsverfahren" bezeichnet werden, etwa die RICHARDSON-Extrapolation oder das erste iterative Verfahren, die ROMBERG-Integration. Einen guten Überblick über diese "Extrapolationsverfahren" sowie eine umfangreiche Literaturliste findet man bei D.C.Joyce [7].

2. Gewinnung asymptotischer Entwicklungen

Obwohl es viele Beispiele für as. Entwicklungen der obigen Art gibt, fehlt es doch an allgemeinen Verfahren zur Konstruktion geeigneter Folgen $\{\sigma_n(x)\}$ mit dem gewünschten Konvergenzverhalten.

Im folgenden werden wir ein solches Verfahren vorschlagen; wir beginnen mit einem illustrativen Beispiel.

2.1. Ein Beispiel: $\arcsin(x)$

Die folgende Konstruktion ist eine Verallgemeinerung eines sehr alten, bereits auf Archimedes zurückgehenden Verfahrens zur Berechnung von π . Man vergleiche hierzu etwa [7],[9],[10],[15].

Es sei $x \in [-1,1]$ gegeben; wir wollen eine as. Entwicklung für $f(x) = \arcsin(x)$ konstruieren.

In diesem Spezialfall kennen wir explizit die Taylor-Entwicklung von $f^{-1}(x) = \sin(x)$, es gilt

$$f^{-1}(x) = x + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)!} x^{2\mu+1}. \quad (9)$$

Für $n=1(1)\infty$ definieren wir nun

$$\sigma_n(x) := n \cdot \sin \left(\frac{\arcsin(x)}{n} \right); \quad (10)$$

aufgrund von (9) gilt

$$\sigma_n(x) = \arcsin(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v(x)}{n^{2v}} \quad n=1(1)\infty \quad (11)$$

Das bedeutet nun aber gerade, daß $\sigma_n(x)$ eine as. Entwicklung nach dem logarithmischen System $L(2,4,\dots)$ besitzt.

Auf den ersten Blick macht die Approximation von $\arcsin(x)$ durch (10) nicht viel Sinn, da man die Funktionen $\arcsin(x)$ und $\sin(x)$ ja hierfür bereits auswerten müßte; glücklicherweise kann jedoch die Teilfolge $\{\sigma_{2^i}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$, die nach Kapitel 1 eine Entwicklung nach einem geometrischen as. System besitzt, rekursiv berechnet werden:

Lemma 2.1: Es sei $x \in [-1,1]$; man definiere

$$\left. \begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_i &:= \frac{\sqrt{2} \cdot y_{i-1}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}}} \end{aligned} \right\} \quad i=1(1)\infty \quad (12)$$

Dann gilt

$$y_i = y_i(x) = \sigma_{2^i}(x) \quad i=0(1)\infty .$$

Das Lemma folgt sofort aus (10) und der Halbwinkelformel des Sinus (s. [1], Zf. 4.3) .

2.2. Asymptotische Entwicklungen für beliebige umkehrbare Funktionen

Wir wollen nun für beliebige Funktionen $f(x)$, die auf einem reellen Intervall der Form $[-\alpha, \alpha]$ definiert und dort umkehrbar sind, asymptotische Entwicklungen konstruieren. Zu diesem Zweck werden wir das in obigem Beispiel erkennbare Prinzip verallgemeinern.

Gegeben sei das Intervall $I := [-\alpha, \alpha]$ mit $\alpha > 0$ und eine Funktion f , die I bijektiv auf $[\beta, \gamma]$ abbildet; f besitze eine für alle $x \in I$ konvergente Potenzreihenentwicklung der Form

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v \quad \text{mit } a_1 \neq 0.$$

Aufgrund der Bijektivität von f existiert eine auf $[\beta, \gamma]$ definierte Umkehrfunktion f^{-1} , die eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$f^{-1}(y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu} y^{\mu} \quad (13)$$

besitzt (wegen $f(0) = 0$ ist $0 \in [\beta, \gamma]$).

An der Identität

$$x = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu} \cdot \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v \right)^{\mu}$$

erkennt man, daß die Koeffizienten b_{μ} rekursiv berechenbar sind,

z.B.:-

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}$$

und allgemein

Ausdr. ... z

in ...

$$b_\mu = \frac{1}{a_1^{2\mu-1}} \sum_{i_1 + \dots + i_\mu = \mu-1} \gamma_{i_1 \dots i_\mu} \cdot a_1^{i_1} \dots a_\mu^{i_\mu}$$

(vgl. [14], S.160) .

(14)

Diese Überlegungen sind Grundlage für den folgenden (Haupt-)Satz, über eine Möglichkeit zur Gewinnung asymptotischer Entwicklungen.

Satz 2.2: Mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen besitzen die Funktionen $\sigma_n(x)$, definiert durch

$$\sigma_n(x) := n \cdot a_1 \cdot f^{-1} \left(\frac{f(x)}{n} \right) \quad n=1(1)\infty \quad (15)$$

eine as. Entwicklung nach dem logarithmischen System $L(1,2, \dots)$ mit beliebigem m .

Der Beweis ergibt sich durch formales Ausrechnen von $\sigma_n(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= n \cdot a_1 \cdot f^{-1} \left(\frac{f(x)}{n} \right) \\ &= \frac{n}{b_1} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\mu \\ &= f(x) + \sum_{\mu=2}^{\infty} b_\mu \cdot \frac{f(x)^\mu}{n^{\mu-1}} \\ &= f(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v(x)}{n^v} \end{aligned}$$

▲

Bemerkung_2.3: Besitzt die Taylor-Entwicklung von f^{-1} nur ungerade Potenzen von x , so haben die nach (15) definierten $\sigma_n(x)$ eine as. Entwicklung nach dem System $L(2,4,\dots)$, so z.B. in Abschnitt 2.1. .

Eine Entwicklung nach dem System $L(2,4,\dots)$ kann aber auch andernfalls gewonnen werden, und zwar durch die Definition:

$$\sigma_n(x) := \frac{n \cdot a_1}{2} \left\{ f^{-1} \left(\frac{f(x)}{n} \right) - f^{-1} \left(\frac{f(x)}{-n} \right) \right\} .$$

Wie wir oben für $\arcsin(x)$ zeigten, kann die Folge $\{\sigma_n(x)\}$ (oder eine Teilfolge, z.B. $\{\sigma_{2i}(x)\}$) häufig rekursiv berechnet und somit sinnvoll zur Approximation von f benutzt werden, vgl. die folgenden Beispiele und Kapitel 3 (das erste Element der Folge, $\sigma_1(x)$, ist gerade der Linearteil der Taylorreihe von f und kann somit immer explizit angegeben werden) .

Bemerkung_2.4: Die vorangegangenen Überlegungen einschließlich Satz 2.2 können auch für den komplexen Fall formuliert werden; die hierzu nötigen Sätze über die Umkehrung von Potenzreihen findet man etwa in [4,S.135ff] oder [6,S.159ff].

2.3. Weitere Beispiele

$$\underline{2.3.1. \quad f(x) := \arctan(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{2\mu+1} x^{2\mu+1}}$$

Aufgrund der Beziehung $f(x) = \frac{\pi}{2} - f\left(\frac{1}{x}\right)$ genügt es, das
Ausgang
 Intervall $[-1, 1]$ zu betrachten. Es gilt dann $[\beta, \gamma] = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
 durch

$\sigma_n(x)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &:= n \cdot \tan\left(\frac{\arctan(x)}{n}\right) \\ &= \arctan(x) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v(x)}{n^{2v}} \quad n=1(1)\infty. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Halbwinkelformel des Tangens [1, Zf.4.3] erhalten wir die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_i &:= \frac{2 \cdot y_{i-1}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} i=1(1)\infty \\ (16) \end{array} \right\}$$

und wiederum ist

$$y_i = y_i(x) = \sigma_{2^i}(x).$$

Ein kleines numerisches Beispiel hierzu: Approximation von
 $\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 0.7853981633974483\dots$ mittels der Rekursion (16)
 und der Elimination (7).

Die erste Spalte von Tabelle I zeigt in der i-ten Reihe den Absolutbetrag des Fehlers von y_i (beginnend mit $i=0$). Die folgenden Spalten zeigen die Fehler von $y_i^{(k)}$ in Form des Schemas (8).

$i \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.21E-00							
1		0.14E-01						
	0.43E-01		0.22E-03					
2		0.67E-03		0.88E-06				
	0.10E-01		0.26E-05		0.86E-09			
3		0.40E-04		0.26E-08		0.21E-12		
	0.25E-02		0.39E-07		0.63E-12		0.13E-16	
4		0.24E-05		0.95E-11		0.38E-16		0.20E-21
	0.63E-03		0.60E-09		0.58E-15		0.59E-21	
5		0.15E-06		0.36E-13		0.88E-20		
	0.16E-03		0.93E-11		0.56E-18			
6		0.95E-08		0.14E-15				
	0.39E-04		0.14E-12					
7		0.59E-09						
	0.99E-05							

Tabelle I

$$\underline{2.3.2. \quad f(x) := \log(1+x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+1}}{\mu} x^{\mu}}$$

Es sei $I := [-\alpha, \alpha]$ mit $0 < \alpha < 1$. Wir haben

$$f^{-1}(y) = \exp(y) - 1.$$

$\sigma_n(x)$ ist somit definiert durch

Aufwand:

$$\text{Die Bedingung: } \sigma_n(x) := n \cdot \left(\exp \left(\frac{\log(1+x)}{n} \right) - 1 \right) \quad n=1(1)\infty. \quad (17)$$

Aufgrund der Funktionalgleichung von \exp können alle $\sigma_n(x)$ durch elementare Operationen berechnet werden, es gilt

$$\text{benötigen wir:} \quad \sigma_n(x) = n \left((1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \right); \quad (18)$$

Satz 2.2 besagt in diesem Fall, daß

$$\text{Dann gilt:} \quad \sigma_n(x) = \log(1+x) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v(x)}{n^v}.$$

Durch die Transformation $t:=1+x$ erhalten wir

$$\sigma_n = n \cdot \left(t^{\frac{1}{n}} - 1 \right), \quad (19)$$

eine weithin bekannte Formel zur Berechnung von $\log(t)$.

Nach Bemerkung 2.3 können wir nun noch die Funktionen

$$\tilde{\sigma}_n(t) := \frac{n}{2} \cdot \left(t^{\frac{1}{n}} - t^{-\frac{1}{n}} \right) \quad (20)$$

bilden, die eine Entwicklung nach dem as. System $L(2,4, \dots)$ besitzen (s. auch [10, S.170]).

Als nächstes wollen wir einen Vergleich durchführen zwischen unserer Methode der Approximation durch Elimination, angewandt auf (20) mit $n = 2^i$, und polynomialer sowie rationaler Approximation mit gleichem Zähler- und Nennergrad. Dies soll beispielhaft an der Funktion $\log(x)$ auf dem Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}]$ durchgeführt werden.

Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, betrachte man zunächst Tabelle II ; Spalte 1 enthält die durch die Approximation zu erreichende Genauigkeit $\epsilon_j = 2^{-j}$, Spalte 2 gibt den Index k_{\max} , d.h. anschaulich die Anzahl der Spalten an, die das Eliminationsschema (8), angewandt auf (20), haben muß. In Spalte 3 wird der Grad des Approximationspolynoms, dessen Abweichung erstmals ϵ_j unterschreitet, angegeben, in Spalte 4 entsprechend der Zähler- und Nennergrad der rationalen (n,n) -Approximation.

(1)	(2)	(3)	(4)
ϵ_j	k_{\max}	n	(n,n)
2^{-1}	0	1	(1,1)
2^{-2}	1	1	(1,1)
2^{-3}	1	2	(1,1)
2^{-4}	2	3	(1,1)
2^{-5}	2	3	(1,1)
2^{-6}	2	4	(2,2)
2^{-7}	2	5	(2,2)
2^{-8}	2	5	(2,2)
2^{-9}	2	6	(2,2)
2^{-10}	2	7	(2,2)
2^{-11}	2	8	(2,2)
2^{-12}	2	8	(3,3)
2^{-13}	2	9	(3,3)
2^{-14}	3	10	(3,3)

Tabelle II

Um einen aussagefähigen Vergleich zu erhalten, muß man nun den Aufwand bestimmen, den die jeweilige Methode erfordert:

Die Berechnung der Werte der ersten Spalte nach (20) ,

bedeutet

$$y_i(x) = 2^{i-1} \cdot \left(x^{\frac{4}{2^i}} - x^{-\frac{4}{2^i}} \right) \quad i=0(1)k$$

benötigt k Quadratwurzel-Operationen $(x^{\frac{4}{2^i}} := \sqrt{x^{\frac{4}{2^{i-1}}}})$,

sowie je $(k + 1)$ Additionen, Divisionen und Shifts (=Division durch eine Zweierpotenz).

Ein Eliminationsvorgang (7) besteht aus einer Addition, einer Division und einem Shift, so daß wir den folgenden Gesamtaufwand zur Berechnung der Approximation $y_0^{(k)}$ haben:

$$\begin{aligned} \text{jeweils} \quad & k + 1 + \sum_{j=1}^k j \\ & = k + 1 + \frac{k \cdot (k+1)}{2} \quad \text{Shifts, Additionen und Divisionen} \end{aligned}$$

sowie k Quadratwurzeln .

Die Auswertung eines Polynoms n -ten Grades erfordert je n Multiplikationen und Additionen, entsprechend die Auswertung einer rationalen Funktion mit Zähler- und Nennergrad n je $2n$ Multiplikationen und Additionen sowie eine Division.

Um also etwa im obigen Beispiel eine Genauigkeit von 2^{-13} zu erhalten, muß man die folgenden Operationen durchführen (vgl. Tabelle II) :

Iteration (20) mit	6	Shifts
Elimination (7) :	6	Additionen
	6	Divisionen
	2	Quadratwurzeln
Polynom-Approximation :	9	Additionen
	9	Multiplikationen
Rationale (n,n)-	6	Additionen
Approximation :	6	Multiplikationen
	1	Division

Zieht man in Betracht, daß auf modernen Rechenanlagen das Auswerten einer Quadratwurzel kaum länger dauert als z.B. eine Division, so sieht man, daß bereits bei dieser kleinen Genauigkeit ($2^{-13} \approx 10^{-4}$) das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren mit den beiden klassischen vergleichbar ist, zumal man sich ja vor Anwendung von (20) keinerlei Koeffizienten o.ä. verschaffen muß, im Gegensatz zu beiden anderen Verfahren, wo dies zumindest im rationalen Fall häufig Schwierigkeiten bereitet.

Nicht nur gleichwertig, sondern deutlich vorteilhafter ist das Eliminationsverfahren bei höheren Genauigkeiten: So hat z.B. $y_0^{(4)}$ in obigem Beispiel eine Abweichung von weniger als 10^{-22} . Um einen Fehler dieser Größenordnung mit polynomialer Approximation zu erreichen, muß man ein Polynom etwa 60-ten Grades (!) auswerten (Halbachsensumme der Regularitätsellipse $= \frac{1}{3} \cdot (4 + \sqrt{7}) \approx 2.215$), was -ganz abgesehen von numerischen Schwierigkeiten- sehr aufwendig und speicherplatzintensiv ist.

Es gibt zahlreiche weitere Beispiele betreffend elementare Funktionen, etwa area-Funktionen oder $\exp(x)$; wir leiten diese hier nicht explizit ab, sondern wenden uns einer Klasse von höheren transzendenten Funktionen zu:

3. Elliptische Funktionen und elliptische Integrale

Die Methode (15) zur Gewinnung asymptotischer Entwicklungen ist besonders effizient, wenn die Funktion f^{-1} ein algebraisches Additionstheorem besitzt.

Mit Funktionen, die diese Eigenschaft haben, hat sich ausführlich K.Weierstraß beschäftigt [16]. Es gilt der

Satz 3.1 (K.Weierstraß): Es sei $\varphi(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, die ein algebraisches Additionstheorem besitzt.

Dann ist $\varphi(z)$

1. eine rationale Funktion von z oder
2. eine rationale Funktion eines Arguments der Form $\exp\left(\frac{2\pi i}{\omega} \cdot z\right)$ ($\rightarrow \varphi$ ist einfach periodisch) oder
3. eine elliptische Funktion ($\rightarrow \varphi$ ist doppelt-periodisch)

Auch die Umkehrung hiervon ist richtig: Eine Funktion, die zu einer dieser drei Klassen gehört, besitzt ein algebraisches Additionstheorem.

1. und 2. können als Spezialfall von 3. aufgefaßt werden; diesem dritten Fall wenden wir uns nun zu.

3.1. Eigenschaften elliptischer Funktionen und Integrale

Zunächst geben wir einen kurzen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen, der zwar etwas ausführlicher ist, als es für die anschließende Anwendung von Satz 2.2 nötig wäre, jedoch natürlich keinen tiefen Einblick in die Theorie der elliptischen Funktionen geben kann. Hierfür verweisen wir auf die entsprechende Literatur ([1],[4],[6],[8],[11],[14],[16],[17]), wo man auch die Beweise der nachfolgenden Aussagen findet.

Definition 3.2:

a) Eine Funktion $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt elliptisch, wenn gilt:

1. φ ist meromorph und
2. es gibt zwei von Null verschiedene komplexe Zahlen ω_1, ω_2 mit $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, so daß

$$\varphi(z+\omega_1) = \varphi(z) \quad \text{und}$$

$$\varphi(z+\omega_2) = \varphi(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. ω_1 und ω_2 heißen primitive Perioden von φ .

b) Es sei z_0 eine beliebige, aber fest gewählte komplexe Zahl; die Menge

$$P_\varphi(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; z = z_0 + \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2; 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1\}$$

heißt Periodenparallelogramm von φ (bzgl. z_0).

Die elementare Theorie (s. obige Literaturhinweise) besagt, daß eine elliptische Funktion ohne Pole eine Konstante ist (Liouville) und daß die Residuensumme einer elliptischen Funktion φ in jedem Periodenparallelogramm gleich Null ist. Daraus folgt, daß φ mindestens zwei Pole (mit Vielfachheit gezählt) in $P_\varphi(z_0)$ haben muß. Die beiden einfachsten Möglichkeiten, diese Forderung zu erfüllen, sind

1. φ hat genau einen Pol der Ordnung zwei in $P_\varphi(z_0)$ (Weierstraß),
2. φ hat genau zwei einfache Pole in $P_\varphi(z_0)$ (Jacobi) .

Im folgenden werden wir uns mit Jacobi's elliptischen Funktionen beschäftigen, speziell mit dem sinus amplitudinis :

Für reelle Zahlen α und k , $0 \leq k \leq 1$, bezeichnen wir mit x das Integral

$$x := \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta}} ; \quad (21)$$

man nennt die Funktion $\alpha(x,k)$, die man durch Umkehrung des Integrals (21) erhält, Amplitude von x ($\text{am}(x,k)$), und definiert den sinus amplitudinis durch

$$\text{sn}(x,k) := \sin(\alpha) := \sin \text{am}(x,k) .$$

Es gilt $\text{sn}(x,0) = \sin(x)$ und $\text{sn}(x,1) = \tanh(x)$; der sinus amplitudinis ist somit eine natürliche Verallgemeinerung der trigonometrischen Funktionen, die in Kapitel 2 behandelt wurden.

Unsere Definition von $\operatorname{sn}(x,k)$ gilt zunächst nur für $x \in \mathbb{R}$, denn mit diesem Fall werden wir uns ausschließlich befassen. Die Funktion kann jedoch auf die ganze komplexe Ebene fortgesetzt werden (s. [11, S.17]).

Diese (fortgesetzte) Funktion $\operatorname{sn}(z,k)$ ist eine elliptische Funktion; sie hat die primitiven Perioden $\omega_1 = 4 \cdot K(k)$ und $\omega_2 = 2i \cdot K(k')$ und einfache Pole genau in den Punkten

$$z_{n,m} := 2n \cdot K(k) + (2m+1) \cdot i \cdot K(k') \quad , \quad n, m \in \mathbb{Z} .$$

Dabei ist $k' := \sqrt{1 - k^2}$ und $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Art, definiert durch

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad ; \quad (22)$$

$\operatorname{sn}(z,k)$ hat also in jedem Periodenparallelogramm genau zwei einfache Pole.

Als elliptische Funktion besitzt der sinus amplitudinis nach Satz 3.1 ein algebraisches Additionstheorem (s. z.B. [1, Zf.16.17] oder [11, S.22]), aus dem man die folgende "Halbwinkel-Formel" ableitet:

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{2}, k\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(x,k)}}{1 + \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(x,k)}} \quad . \quad (23)$$

3.2. Berechnung elliptischer Integrale erster Art

Aufgrund von (23) können wir nun Satz 2.2 sinnvoll auf $\text{sn}(x,k)$ anwenden und somit eine as. Entwicklung für die Umkehrfunktion von $\text{sn}(x,k)$ konstruieren (bei Anwendung des Satzes ist $\text{sn}(x,k) = f^{-1}(x)$).

Diese Umkehrfunktion ist ihrerseits von größtem Interesse, es handelt sich um das elliptische Integral erster Art, definiert durch

$$F(x,k) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (24)$$

(vgl. (22)). $F(x,k)$ hat eine Reihenentwicklung der Form

$$F(x,k) = x + \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v(k) \cdot x^{2v+1}.$$

Nach Satz 2.2 und Bemerkung 2.3 haben wir somit das folgende Ergebnis :

Die Funktionen $\sigma_n = \sigma_n(x,k)$, definiert durch

$$\sigma_n := n \cdot \text{sn}\left(\frac{F(x,k)}{n}, k\right) \quad n=1(1)\infty \quad (25)$$

besitzen eine as. Entwicklung nach dem logarithmischen System $L(2,4, \dots)$, d.h.

$$\sigma_n = \sigma_n(x,k) = F(x,k) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v(x,k)}{n^{2v}}.$$

Mit Formel (23) ergibt dies den

Satz 3.3: Für $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq k \leq 1$ sei

$$\left. \begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_i &:= 2^i \cdot \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{k y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}}} \end{aligned} \right\} \quad i=1(1)\infty \quad (26)$$

Dann ist

$$y_i = y_i(x, k) = \sigma_{2^i}(x, k)$$

mit $\sigma_n(x, k)$ aus (25); dies bedeutet, daß y_i eine as. Entwicklung nach dem geometrischen System $G(4^{-1}, 4^{-2}, \dots)$ besitzt, also

$$y_i(x, k) = F(x, k) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v(x, k)}{4^{iv}} \quad (27)$$

Bemerkung 3.4: Für $k = 0$ lautet (26)

$$y_i = \frac{2^i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot y_{i-1}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}}}$$

d.h. $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i(x, 0) = \arcsin(x)$ (vgl. (12)); dies ist ein neuer Beweis dafür, daß $\operatorname{sn}(x, 0) = \sin(x)$.

Eine elementare Umformung zeigt, daß

$$\sigma_n^2(x, k) = F^2(x, k) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_v(x, k)}{n^{2v}}.$$

Aus Stabilitäts- und Schnelligkeitsgründen sollte man daher die Iteration

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_0 &:= x \\ \tilde{y}_i &:= \frac{4 \tilde{y}_{i-1}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\tilde{y}_{i-1}}{4^{i-1}}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - k^2 \cdot \frac{\tilde{y}_{i-1}}{4^{i-1}}}\right)} \end{aligned} \right\} (28)$$

benutzen, die ebenfalls eine as. Entwicklung nach dem System $L(2, 4, \dots)$ besitzt (mit Grenzwert $F^2(x, k)$), jedoch in jedem Schritt eine Quadratwurzel-Auswertung einspart.

In der Praxis wendet man die Elimination (7) auf die \tilde{y}_i an und zieht am Ende der Prozedur die Wurzel aus $\tilde{y}_0^{(k_{\max})}$.

Wieder ein kleines numerisches Beispiel: Approximation von $F(0.5, 0.2)$ durch (28) und (7). Die Ergebnisse zeigt Tabelle III in Form von Schema (8); wir sehen die berechneten Werte $\tilde{y}_i^{(k)}$ für $k=0(1)5$ und $i=0(1)5-k$. $\tilde{y}_0^{(5)}$ stimmt mit $F^2(0.5, 0.2)$ auf 17 Dezimalstellen überein! Der resultierende Wert für $F(0.5, 0.2)$ ist $\sqrt{\tilde{y}_0^{(5)}} = 0.52450880529443994$ (auf 17 Dezimalstellen genau).

	0	1	2	3	4	5
0	.2500000000000000					
1		.27482991447770532				
2	.26862243585827899		.27510827759559904			
3		.27509144240073068		.27510948648328087		
4	.27347419076511776		.27510947696941084		.27510948683135072	
5		.27510834980886833		.27510948682999108		.27510948683140070
6	.27469981004793069		.27510948667591951		.27510948681140065	
7		.27510941562172881		.27510948683139514		
8	.27500701422827928		.27510948682896584			
9		.27510948237851352				
10	.27508386534095496					

Tabelle III

3.3. Numerischer Vergleich mit der AGM-Methode

Die wohl älteste und zugleich bekannteste Methode zur numerischen Berechnung (vollständiger) elliptischer Integrale ist die von C.F.Gauß entwickelte Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels (AGM-Methode), die auf folgendem beruht (vgl. [1],[2],[3],[13]) :

Es seien zwei reelle Zahlen a, b mit $a \geq b > 0$ gegeben; die durch

$$\begin{aligned}
 a_0 &:= a, & b_0 &:= b \\
 a_{v+1} &:= \frac{1}{2} (a_v + b_v) \\
 b_{v+1} &:= \sqrt{a_v \cdot b_v}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} a_{v+1} \\ b_{v+1} \end{aligned}} \right\} v=0(1)\infty \quad (29)$$

definierten Folgen $\{a_v\}$ und $\{b_v\}$ konvergieren monoton gegen einen gemeinsamen Grenzwert $\text{AGM}(a,b)$. Diese Konvergenz ist quadratisch, d.h. es gibt eine Zahl $\gamma > 0$, so daß

$$(a_{v+1} - b_{v+1}) \leq \gamma(a_v - b_v)^2 \quad \text{für alle } v.$$

Der Wert $\text{AGM}(a,b)$ kann ausgedrückt werden durch das vollständige elliptische Integral erster Art

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta)}} \quad (30)$$

das durch die Substitution $t := \sin(\theta)$ auf die in (22) bzw. (24) definierte Form

$$I(a,b) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \cdot t^2)}} \quad (31)$$

gebracht werden kann.

Es gilt

$$\text{AGM}(a,b) = \frac{\pi}{2 I(a,b)} \quad (32)$$

Dies fassen wir zu einem Algorithmus zur Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals erster Art $K(k) = F(1,k)$ nach der AGM-Methode zusammen:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \text{setze} \quad a_0 := 1, \quad b_0 := \sqrt{1 - k^2} \\ 2. \quad & v := v+1 \\ & a_v := \frac{1}{2} (a_{v-1} + b_{v-1}) \\ & b_v := \sqrt{a_{v-1} \cdot b_{v-1}} \end{aligned} \quad (33)$$

Genauigkeit erreicht ? nein \rightarrow 2.
 ja \rightarrow 3.

$$3. \quad F(1,k) := \frac{\pi}{2 \cdot a_v}$$

Die Iterationsvorschrift des Verfahrens (33) ist sehr einfach; wegen der quadratischen Konvergenz ist es daher allen anderen Verfahren zur Berechnung vollständiger elliptischer Integrale bzgl. des Verhältnisses Genauigkeit/Schnelligkeit überlegen.

Anders ist das bei der Berechnung des Integrals $F(x,k)$ für $0 \leq x < 1$.

Die Iteration (33) muß hier folgendermaßen modifiziert werden (s. auch [1, Zf.17.6]) :

$$1. \quad \text{setze} \quad a_0 := 1, \quad b_0 := \sqrt{1 - k^2} \\ \varphi_0 := \arcsin(x)$$

$$2. \quad v := v+1 \\ a_v := \frac{1}{2} (a_{v-1} + b_{v-1}) \\ b_v := \sqrt{a_{v-1} \cdot b_{v-1}}$$

φ_v ist implizit definiert durch (34)

$$\tan(\varphi_v - \varphi_{v-1}) = \frac{b_{v-1}}{a_{v-1}} \cdot \tan(\varphi_{v-1});$$

dabei ist φ_v so zu wählen, daß $\varphi_v - \varphi_{v-1} \geq 0$.

Genauigkeit erreicht ? nein \rightarrow 2.
 ja \rightarrow 3.

$$3. \quad F(x,k) := \frac{\varphi_v}{2^v \cdot a_v}.$$

Dieser Algorithmus ist wegen der Tangens- bzw. Arcustangens-Operationen relativ aufwendig. Für Genauigkeiten, wie sie etwa für (Micro-)Computer-Approximationen benötigt werden, ist (34) daher langsamer als unser Verfahren ((28) & (7)).

Tabelle IV zeigt die durchschnittliche CPU-Zeit (in msec), die die beiden Verfahren benötigten, um $F(x,k)$ mit der in Spalte 1 angegebenen Genauigkeit zu berechnen (auf der SIEMENS-Anlage der Universität Mannheim).

Für

zu erreichende Genauigkeit	Zeit in msec	
	AGM-Verfahren (24f)	Eliminations- Verfahren (24)&(7)
10^{-2}	1.62	0.71
10^{-4}	1.98	1.02
10^{-6}	2.30	1.46
10^{-8}	2.61	1.70
10^{-10}	2.84	1.96
10^{-12}	3.02	2.38
10^{-14}	3.23	2.66
10^{-16}	3.39	2.98
10^{-18}	3.47	3.10
10^{-20}	3.62	3.46
10^{-22}	3.75	3.75
10^{-24}	3.81	3.92
10^{-26}	4.02	4.28

Tabelle IV

An der Tabelle erkennt man, daß unser Eliminationsverfahren bis zu einer Genauigkeit von 10^{-20} dem AGM-Verfahren zeitlich überlegen ist.

Da auch andere Methoden, z.B. Potenzreihen-Auswertung, nicht sehr effizient sind, kann das Eliminationsverfahren also durchaus als geeignet zur praktischen Berechnung elliptischer Integrale bezeichnet werden.

3.4. Berechnung von $\text{sn}(x,k)$

Wie wir oben sahen, kann das elliptische Integral erster Art $F(x,k)$ mit unserer Methode berechnet werden.

$F(x,k)$ hat die Ableitung

$$\frac{d}{dx} F(x,k) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}^{-1},$$

die durch elementare Operationen berechnet werden kann.

Daher ist es möglich, das Newton-Verfahren zur Berechnung der Umkehrfunktion zur Approximation von $\text{sn}(x,k)$ anzuwenden.

Die Newton-Iteration lautet in diesem Fall

$$\left. \begin{aligned} f_0 &:= x \\ f_{v+1} &:= f_v - \sqrt{(1-f_v^2)(1-k^2f_v^2)} \cdot (F(f_v,k) - x) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

v=0(1) ∞

Für $x \in [0,1]$ konvergiert die Folge $\{f_v\}$ gegen $\text{sn}(x,k)$.

Mit Hilfe der Formel

$$\text{sn}(2x,k) = \frac{2 \text{sn}(x,k) \cdot \sqrt{(1-\text{sn}^2(x,k)) \cdot (1-k^2\text{sn}^2(x,k))}}{1-k^2\text{sn}^4(x,k)} \quad (36)$$

können wir, zumindest theoretisch, $\text{sn}(x,k)$ für beliebig großes x approximieren.

Der ganze Prozess mag bei dieser Schilderung etwas aufwendig wirken, wie wir im nächsten Beispiel jedoch sehen werden, ist er das, vom zeitlichen Aspekt her, keineswegs.

Numerisches Beispiel: Abbildung I zeigt das Bild von $\text{sn}(x,k)$ im Bereich

$$B := \{(x,k) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq k \leq 1\}.$$

Für die Zeichnung wurde mit der oben beschriebenen Methode der Wert von $\text{sn}(x,k)$ in den 231 diskreten Punkten (x_v, k_μ) mit

$$x_v := v \cdot \frac{\pi}{20}, \quad v=0(1)20, \quad k_\mu := \frac{\mu}{10}, \quad \mu=0(1)10$$

auf 9 Dezimalstellen genau berechnet; für die Berechnung von $F(f,k)$ wurde dabei die Iteration (28) und die Elimination (7) mit $k_{\max} = 5$ benutzt. Die gesamte Rechenzeit betrug nur 0.78 CPU-Sekunden (auf der SIEMENS-Anlage der Universität Mannheim), das sind im Durchschnitt weniger als 0.0035 CPU-Sekunden für eine Auswertung von $\text{sn}(x,k)$!

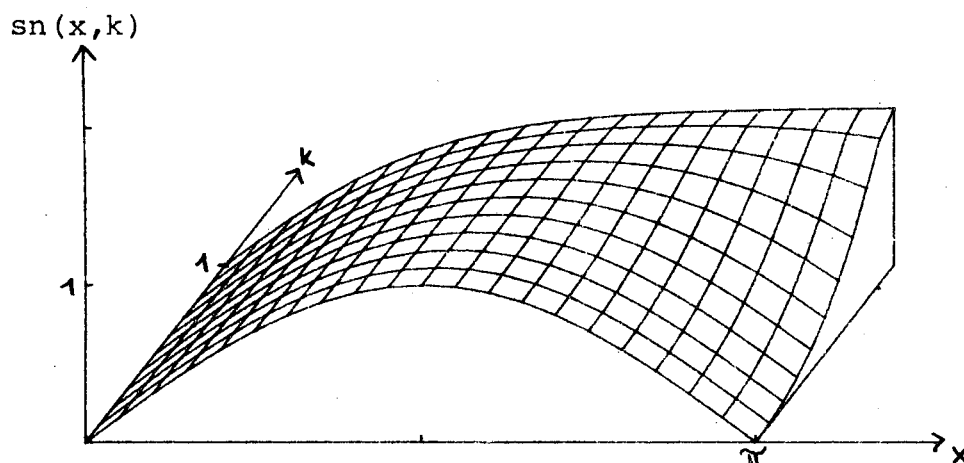


Abbildung I

3.5. Beliebige elliptische Funktionen

Zu Beginn dieses Kapitels waren wir bei der Suche nach Funktionen mit einem algebraischen Additionstheorem auf die elliptischen Funktionen gestoßen. Die weiteren Untersuchungen bezogen sich auf eine spezielle Funktion dieser Art, nämlich $\operatorname{sn}(x,k)$.

Dies ist natürlich zunächst eine gewisse Einschränkung, aber das folgende Lemma wird zeigen, daß unsere Ergebnisse auf beliebige elliptische Funktionen übertragbar sind.

Lemma 3.5: Jede elliptische Funktion φ mit primitiven Perioden ω_1 und ω_2 kann als rationale Funktion von $\operatorname{sn}(z,k)$ und $\frac{d}{dz} \operatorname{sn}(z,k)$ dargestellt werden.

Beweis: Ein bekannter Satz von K. Weierstraß (z.B. [6, S.172]) besagt, daß φ darstellbar ist in der Form

$$\varphi(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z) \cdot R_2(\wp(z)) ; \quad (37)$$

dabei sind R_1 und R_2 rationale Funktionen und $\wp(z)$ ist die Weierstraß'sche \wp -Funktion.

Man definiere die Zahlen e_v , $v=1,2,3$ wie folgt:

$$e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

Dann ist

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u,k)}$$

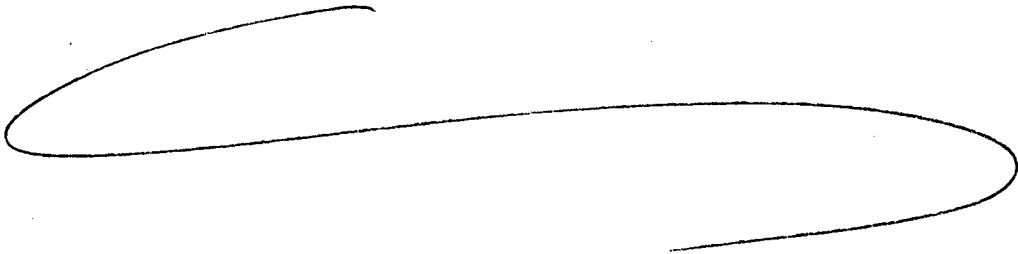
mit

$$u := z \cdot \sqrt{e_1 - e_3}$$

und

$$k := \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} .$$

Zusammen mit (37) beweist dies die Aussage. \blacktriangle



Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bedanken bei Herrn Prof.Dr. G.Meinardus, ohne dessen zahlreiche Anregungen und intensive Bemühungen das Entstehen dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Mein Dank gilt ebenfalls den Herren Prof.Dr. H.J.Stetter und Prof.Dr. J.B.Borwein, die mir mit wertvollen Literaturangaben behilflich waren.

Dipl.-Math. Guido Walz

Kontaktadresse:

Lehrstuhl für Mathematik IV
Universität Mannheim

D-6800 Mannheim 1

LITERATUR

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I.:
Handbook of Mathematical Functions
Dover Publ., New York 1965
- [2] Borwein, J.M. and Borwein, P.B.:
The Arithmetic-Geometric Mean and Fast Computation
of Elementary Functions
SIAM Review 26 (1984), S.351 - 366
- [3] Brent, R.P.:
Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions
Journal of the ACM 23 (1976), S.242 - 251
- [4] Cayley, A.:
An Elementary Treatise on Elliptic Functions
Dover Publ., New York 1961
- [5] Hurwitz, A.:
Über die Einführung der elementaren transzendenten
Funktionen in der algebraischen Analysis
Math. Annalen 70 (1911), S.33 - 47
- [6] Hurwitz, A. und Courant, R.:
Funktionentheorie, 4.Aufl.
Springer-Verlag, Berlin 1964
- [7] Joyce, D.C.:
Survey of Extrapolation Processes in Numerical Analysis
SIAM Review 13 (1971), S.435 - 488
- [8] Magnus, W. , Oberhettinger, F. and Soni, R.P.:
Formulas and Theorems for Special Functions of
Mathematical Physics
Springer-Verlag, Berlin 1966

- [9] Meinardus,G.:
On the Asymptotic Behavior of Iteration Sequences
Proc. of the Fifth South African Symposium on
Numerical Analysis, Durban 1979
- [10] Meinardus,G. und Merz,G.:
Praktische Mathematik II
Bibliographisches Institut, Mannheim 1982
- [11] Reutter,F. , Haupt,D. und Jordan,G.:
Elliptische Funktionen einer komplexen Veränderlichen;
Nomogramme und Formeln
Verlag G.Braun, Karlsruhe 1971
- [12] Rutishauser,H.:
Ausdehnung des Rombergschen Prinzips
Numerische Mathematik 5 (1963), S.48 - 54
- [13] Salamin,E.:
Computation of π Using Arithmetic-Geometric Mean
Math. of Computation 30 (1976), S.565 - 570
- [14] Sansone,G. and Geretsen,J.:
Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable
Noordhoff Ltd., Groningen 1960
- [15] Stiefel,E.:
Altes und Neues über numerische Quadratur
ZAMM. 41 (1961), S.408 - 413
- [16] Weierstraß,K.:
Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der
elliptischen Funktionen
Physica-Verlag, Würzburg 1962 (Nachdruck der 2.Aufl. 1893)
- [17] Whittaker,E.T. and Watson,G.N.:
A Course of Modern Analysis, 4th ed.
Cambridge Univ. Press, Cambridge 1952